

SOMMAIRE

Tome 1

<i>Préface à la nouvelle édition</i>	11
Introduction	13
Chapitre 0. Notations et connaissances utilisées	19
0.1 Ensembles	19
0.2 Algèbre	19
0.3 Espaces métriques	20
0.4 Topologie générale	21
0.5 Trigonométrie hyperbolique	21
0.6 Mesure de Lebesgue, théorie de l'intégration	21
Chapitre 1. Groupes opérant dans un ensemble : langage, exemples, applications	23
1.1 Définition	25
1.2 Exemples	25
1.3 Fidélité	26
1.4 Transitivité	26
1.5 Stabilisateurs, espaces homogènes	27
1.6 Orbites, formule des classes	29
1.7 Les groupes des paveurs	31
1.8 Pavages de S^2 , polyèdres réguliers et sous-groupes finis de $O^+(3)$	42
1.9 Exercices	50
Chapitre 2. Espaces affines	53
2.1 Définition	55
2.2 Exemples, repères affines	57
2.3 Morphismes d'espaces affines	59
2.4 Sous-espaces affines	64
2.5 Enfin de la géométrie : Thalès, Pappus, Desargues	71
2.6 Le théorème fondamental de la géométrie affine	74
2.7 Espaces affines réels de dimension finie	79
2.8 Exercices	88
Chapitre 3. Un espace universel. Applications	91
3.1 Un espace universel	93
3.2 L'espace universel et les morphismes	96
3.3 Polynômes sur un espace affine	97
3.4 Barycentres	100

3.5	Barycentres et morphismes, barycentres et sous-espaces affines	106
3.6	Coordonnées barycentriques	107
3.7	Exercices	109
Chapitre 4.	Espaces projectifs	113
4.0	Introduction	115
4.1	Définition, exemples	116
4.2	Allure des projectifs : cartes	117
4.3	Allure des projectifs : topologie et topologie algébrique... ..	120
4.4	Repères projectifs	125
4.5	Morphismes	126
4.6	Sous-espaces	130
4.7	Perspective, photographie aérienne	135
4.8	Le cas non commutatif	138
4.9	Exercices	139
Chapitre 5.	Liaison affine-projectif. Applications	141
5.0	Introduction	143
5.1	Le complété projectif d'un espace affine	144
5.2	Exemples	145
5.3	Liaison sous-espaces affines, sous-espaces projectifs ; parallélisme	147
5.4	Expédition systématique d'objets à l'infini ; applications	147
5.5	Exercices	151
Chapitre 6.	Droites projectives. Birapport. Homographies. Involutions	153
6.1	Définition du birapport	155
6.2	Calcul explicite du birapport	156
6.3	Effet d'une permutation	158
6.4	Division harmonique	160
6.5	Birapport et dualité. Applications	163
6.6	Les homographies d'une droite projective	167
6.7	Involutions	170
6.8	Exercices	171
Chapitre 7.	Complexifications	175
7.0	Introduction	177
7.1	Complexification d'un espace vectoriel réel	179
7.2	Fonctorialité de $\bullet^{\mathbb{C}}$, ou complexification des morphismes	180
7.3	Complexification des polynômes	180
7.4	Sous-espaces et complexification	181
7.5	Complexifié d'un espace projectif	182
7.6	Complexifié d'un espace affine	183
7.7	Exercices	184

Chapitre 8. Rappels et compléments sur les espaces vectoriels euclidiens	187
8.1 Définition, premières propriétés	189
8.2 Le groupe orthogonal : premières propriétés et plan d'étude	193
8.3 Structure de $O(E)$ lorsque $\dim E = 2$	198
8.4 Structure d'un élément de $O(E)$. Générateurs de $O(E)$ et de $O^+(E)$	202
8.5 Simplicité de $O(E)$	206
8.6 Angles de droites et de demi-droites	208
8.7 Angles orientés dans un plan	212
8.8 Similitudes ; cône et droites isotropes	221
8.9 Quaternions. Applications à $O^+(3)$ et $O^+(4)$	226
8.10 Les $O^+(n)$ et la topologie algébrique	230
8.11 Forme volume canonique d'un espace euclidien orienté. Produit mixte, produit vectoriel	232
8.12 Exercices	236
Chapitre 9. Espaces affines euclidiens	239
9.1 Définition. Isométries. Déplacements	241
9.2 Sous-espaces orthogonaux ; distances	243
9.3 Structure d'un élément de $\text{Is}(X)$. Générateurs de $\text{Is}(X)$, $\text{Is}^+(X)$	247
9.4 Structure des isométries planes et billard polygonal	251
9.5 Similitudes	259
9.6 Similitudes planes	268
9.7 Distances entre plusieurs points	278
9.8 Stabilisateurs de parties	286
9.9 Longueur des courbes	289
9.10 Métrique et géométrie différentielle : formule de la variation première	294
9.11 Distance de Hausdorff entre les compacts	297
9.12 La mesure canonique d'un espace affine euclidien. Volumes	300
9.13 La symétrisation de Steiner	306
9.14 Exercices	311
Chapitre 10. Triangles, sphères et cercles	323
10.1 Triangles : définitions, notations	325
10.2 Résultats classiques	328
10.3 Formulaire	330
10.4 Inégalités, problèmes de minimum	334
10.5 Polygones	338
10.6 Tétraèdres	339
10.7 Sphères	342
10.8 Inversion	350

10.9 Cercles dans le plan	355
10.10 Faisceaux de cercles	359
10.11 Problèmes sur les cercles	364
10.12 Parataxie : prélude aux sections 18.9 et 20.7.....	368
10.13 Exercices	371
Bibliographie	379
Index terminologique	393
Index des notations	423

Tome 2

Chapitre 11. Ensembles convexes	11
11.1 Définition. Exemples	13
11.2 Convexité et topologie générale. Dimension d'un convexe..	21
11.3 Topologie des convexes	23
11.4 Convexes et hyperplans ; théorèmes de séparation	32
11.5 Hyperplans d'appui ; applications	37
11.6 Frontière d'un convexe, sommets, points extrémaux	43
11.7 Théorèmes de Helly et applications	48
11.8 Fonctions convexes	54
11.9 Exercices	66
Chapitre 12. Polytopes. Convexes compacts	71
12.1 Définition, exemples, faces	75
12.2 Volume des polytopes	87
12.3 Aire des polytopes	89
12.4 Polygones réguliers	95
12.5 Polytopes réguliers : définition, exemples	98
12.6 Polytopes réguliers : classification.....	112
12.7 La formule d'Euler	122
12.8 Le théorème de Cauchy	129
12.9 Approximation des convexes compacts par des polytopes	136
12.10 Aire des convexes compacts	140
12.11 L'inégalité isopérimétrique	151
12.12 Exercices	161
Chapitre 13. Formes quadratiques	171
13.1 Définitions. Exemples	175
13.2 Eléments singuliers et isotropes, radical, dégénérescence et singularité.....	178
13.3 Orthogonalité, complétion non singulière d'un sous- espace	182
13.4 Bases orthogonales. Classification pour $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$	185

	187
13.6 Le groupe d'une forme quadratique. Généralités.....	189
13.7 Théorèmes de Witt et de Cartan-Dieudonné.....	193
13.8 Le cas de la dimension 2 : plans artiniens, $\mathcal{O}(1, 1)$	199
13.9 Exercices	203
Chapitre 14. Quadriques projectives	205
14.1 Définition, exemples	207
14.2 Sous-espaces dans $PQ(E)$: faisceaux de quadriques.....	212
14.3 Nature topologique et différentielle des quadriques ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).....	216
14.4 Nature des quadriques lorsque $n = 4$ et q neutre.....	220
14.5 Dualité par rapport à une quadrique propre : polarité... ..	226
14.6 Dualité : quadriques tangentielles, équations tangentielles	231
14.7 Le groupe d'une quadrique propre.....	234
14.8 Exercices	236
Chapitre 15. Quadriques affines	239
15.1 Définition. Ecritures	241
15.2 Réduction des formes quadratiques affines.....	243
15.3 Classification des quadriques affines lorsque $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$	244
15.4 Nature topologique et différentielle des quadriques affines propres réelles et complexes.....	252
15.5 Polarité d'une quadrique affine propre.....	254
15.6 Quadriques affines euclidiennes.....	259
15.7 Exercices	261
Chapitre 16. Coniques projectives	267
16.1 Rappels, écritures, compléments.....	269
16.2 Bonnes paramétrisations, birapport de quatre points, théorème de Pascal.....	271
16.3 Homographies et groupe d'une conique. Applications..	276
16.4 Intersection de deux coniques. Théorème de Bezout....	280
16.5 Faisceaux de coniques.....	291
16.6 Le grand théorème de Poncelet.....	302
16.7 Coniques affines	310
16.8 Exercices	315
Chapitre 17. Coniques euclidiennes	319
17.1 Le principe de Descartes.....	321
17.2 Propriétés métriques : exposé élémentaire.....	323
17.3 Propriétés métriques : exposé belge.....	330
17.4 Propriétés métriques : exposé projectif de Plücker.....	331
17.5 Faisceaux de coniques euclidiennes et points cycliques....	337
17.6 Faisceaux tangentiels de coniques, coniques homofocales	345

17.7	Propriétés particulières à l'ellipse.....	352
17.8	Propriétés particulières des hyperboles.....	354
17.9	Exercices.....	357
Chapitre 18.	La sphère pour elle-même.....	363
18.1	Définition, dimensions spéciales, cartes et projections ...	367
18.2	Topologie et topologie algébrique.....	384
18.3	La sphère comme variété différentielle, mesure canonique.	387
18.4	La métrique intrinsèque de S	391
18.5	Le groupe des isométries de S	393
18.6	Triangles sphériques.....	396
18.7	Polygones sphériques convexes, lemme de Cauchy.....	405
18.8	La sphère S^3 : le parallélisme de Clifford, version sphérique.....	413
18.9	Applications du parallélisme de Clifford à l'espace euclidien de dimension 3 : cercles de Villarceau, parataxie ...	419
18.10	Le groupe conforme, ou groupe de Möbius, de S^d	421
18.11	Exercices.....	427
Chapitre 19.	Géométrie elliptique et géométrie hyperbolique.....	435
19.1	La géométrie elliptique.....	439
19.2	Définition sur les modèles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$	446
19.3	Formule fondamentale et conséquences.....	449
19.4	Le groupe des isométries.....	452
19.5	La mesure canonique de $\mathcal{B}$	454
19.6	Le modèle conforme $\mathcal{C}$	456
19.7	Remarques finales, autres modèles.....	464
19.8	Exercices.....	466
Chapitre 20.	L'espace des sphères.....	471
20.1	L'espace des sphères généralisées.....	473
20.2	La forme quadratique fondamentale.....	475
20.3	Orthogonalité.....	476
20.4	Intersection et angle de deux sphères.....	478
20.5	k -sphères, faisceaux.....	479
20.6	Le groupe circulaire $\text{Conf}(\hat{E})$	482
20.7	Les coordonnées polysphériques.....	483
20.8	Exercices.....	485
Bibliographie.....		491
Index terminologique.....		505
Index des notations.....		535